

第1学年数学科学習指導案

日 時 平成26年6月17日(火) 第6校時
14:20~15:10
対 象 第1学年B組 男子20名 女子20名
計40名
授業者 東京学芸大学附属小金井中学校
教諭 柴田翔
場 所 3階 教育工学室

0. 研究のテーマと授業設計の意図

数学的プロセスの質を高める授業とその手立て

(1) 東京学芸大学附属中高数学教育研究会

今回の授業は東京学芸大学附属中高数学教育研究会の研究の一環として設計した。この研究会は次の目的意識を持っている。それは、我が国の数学教育では、数学の内容(探究した結果)だけでなく数学の問題を探究するプロセスや、そのプロセスで発揮される考え方や能力の育成が重視されてきたにも関わらず、結局のところ、数学の内容を教えることに偏重してしまっていないかということである。当然、数学の内容を教えることを軽視しているわけではなく、また、内容とプロセスを全く別々にとらえているわけでもない。しかし、「数学的な見方や考え方」や「数学的活動」が長い間重視されてきた我が国の数学科授業の実態は、果たしてそれらを重視したものになっているのだろうか。

数学のプロセスを重視するとは、数学を使い、創るプロセスを重視するということである。それは活動としては「数学的活動」であるとしてとらえられるし、そのプロセスにおいて発揮される見方・考え方が「数学的な見方・考え方」であるとしてとらえられる。以下、本研究会では、数学を使い、創るプロセスを総称して、「数学的プロセス」と呼び、本研究会の目的を「数学的プロセス」の質を高める授業とはどのようなべきかを追求していくこととし、研究主題を「数学的プロセスの質を高める授業」に設定した。

(2) 本授業における提案

本授業を設定するにあたって、「数学的プロセスの質を高める」とは、一度行われた数学的活動とその過程において、外的・内的要因によって新たな観点や意図を持って(質の高い)数学的活動の過程を行うことであるととらえた。これは、授業においては、問題解決の中で自己の解決を得た生徒が(あるいは学級が)、友人の発言や教師の新たな観点の提示などを外的要因として、または生徒自身の問題解決の振り返りなどを内的要因として、改めて問題の解決を目指し、新たな観点や意図を持って(これまでより質の高い)数学的活動を行う形で表出するはずである。したがって、授業の設計においては、その授業で行われうる数学的活動を規定した上で、そこで表出する数学的プロセスと、そのプロセスの質を高める手立てを明確にする必要がある。図に示すと次のようになる(図1)。図2は本授業での水準の高まりとその手立てである。

本授業で提案する仮説は、「生徒が遂行できると考えられるプロセスと、授業を行うことで質の高まった生徒のプロセスを規定することで、そのために授業者がとるべき手立てが明らかになる」である。

以上を踏まえて、本授業における研究課題を以下のように設定する。

研究課題：

「生徒が遂行できると考えられるプロセスと，授業を行うことで質の高まった生徒のプロセスを規定することで，そのために授業者がとるべき手立てが明らかになる」という仮説を文字式の導入の授業を通して，実証する

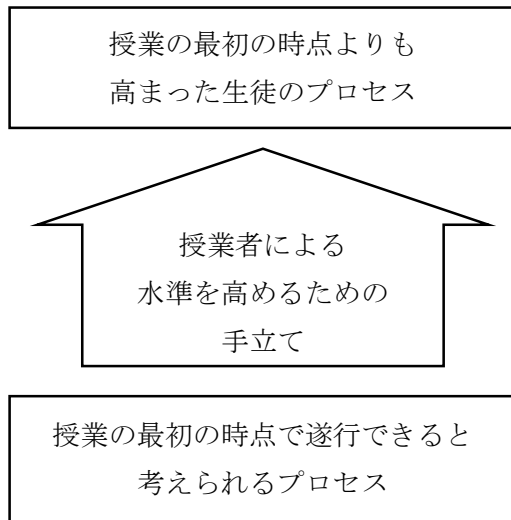


図1 プロセスの質を高める授業の構造

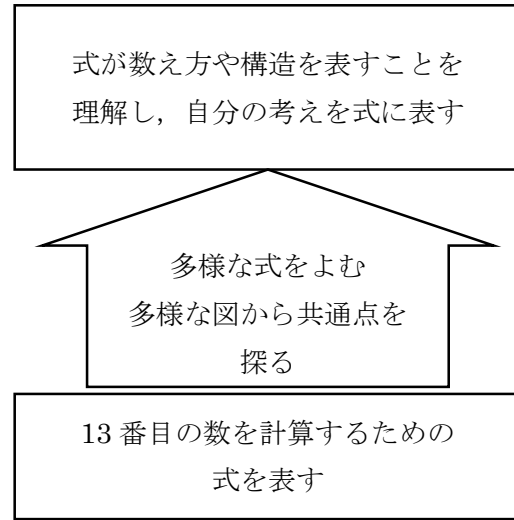


図2 本授業における構造

1. 単元名

文字と式

2. 単元の目標

- ・ 文字や文字を用いた式を利用し，性質や関係を見出したりすることなどを通して，数学的活動の楽しさや数学的に考えることのよさに関心を持ち，文字を用いた式を意欲的に，問題の解決や探究に活用しようとする。【関心・意欲・態度】
- ・ 事象の中にある数量やその関係・法則などを文字を用いて表現し，一般的に考えることができる。また，文字を用いて表現された式に具体的な文字を代入したり，式をよみとったりすることで，式が計算の結果と過程の両方を表すことや，式の表す具体的な事象や関係・法則を考えることができる。【見方や考え方】
- ・ 文字を用いた式における乗法，除法，一次式の加法，減法ができ，式を操作，処理することができる。また数量の関係や法則を式に表現したり式の意味をよみとったりできる。【表現・処理】
- ・ 文字を用いた式の意味やその意義を理解している。【知識・理解】

3. 単元の評価規準

数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量・図形などについての知識・理解
<ul style="list-style-type: none"> ・数量やその関係・法則を一般的に表現するために、文字を用いて考えることの必要性やよさに関心をもち、文字を用いた式で表したり、式の意味をよみとったりしようとする。 ・文字を用いた式における乗法・除法の表し方を知り、式の計算に活用しようとする。 ・文字に値を代入して、式の値を求めようとする。 	<ul style="list-style-type: none"> ・事象の中にある数量やその関係・法則を、文字を用いて表現し、一般的に考えることができる。 ・$a + b$, abなど、文字を用いた式はそれぞれ加法、乗法を現しているとともに、それらの結果も表しているとみることができる。 ・文字に値を代入することで、文字を用いた式を具体的な事象に適用して考えることができる。 ・文字を用いた式の計算も数の計算と同じようにみて、計算の方法を考えることができる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・事象の中にある数量やその関係・法則を、文字を用いて式に表したり、式をよみとったりすることができる。 ・文字を用いた乗法、除法の式を約束に従って適切に表すことや、簡単な一次式の加法と減法の計算をすることができる。 ・文字に値を代入して、式の値を求めることができる。 	<ul style="list-style-type: none"> 文字を用いることで、数量やその関係・法則を一般的に表現したり、式からその意味をよみとったりすることができることを理解している。 ・文字を用いた式における乗法、除法の表し方や、一次式の加法、減法における項のまとめ方を理解している。 ・式の値の意味を理解している。

4. 指導観

小学校において生徒は、例えば $5 + \square = 8$ 、 $3 \times \triangle = 24$ のように、加法と減法、乗法と除法の関係をとらえるのに \square や \triangle を使ったり、例えば、(速さ)×(時間)=(道のり)というように、言葉の式を使って数量やその関係を表したり式の意味を読み取ったりする学習をしてきている。また、中学校における文字を用いた式の学習の素地として、数量を表す言葉や \square 、 \triangle などの代わりに a や x などの文字を用いたり、比例・反比例の関係を式でとらえたりすることを学習してきている。そして、例えば、分数の除法の計算方法を考える際に擬変数を用いたり、数の関係や規則を表すために擬変数を用いたりしてきた。

中学校においては小学校の学習を踏まえ、文字に表したり、その処理したりすることだけでなく、変数としての文字や未知数としての文字、またその集合の代表元としての文字を操作、解釈していくことを学習していく。また、単に文字を導入し、計算していくのではなく、数でありながら変数のように振る舞う数(擬変数)の考察から始め、式の表す意味やその構造などをよみとったり、一般化したりすることによって、文字を導入していく。

文字とその計算を指導することで、それまでの1や3、0.7というように個々の数に対する考察から、一般の数を考察の対象とすることができる。また、様々な事象を数学の世界における関係として記述することができる。さらに、表された式を新たに表現し直し、新たな解釈を得ることができる。このように文字の学習を通して生徒の数学的な探究がより深く、より洗練した形になることを期待している。これらのことは多くは、文字を用いた証明や、方程式、関数などを用いることになるが、本単元では、単にそれらの準備としてではなく、現実の世界における事象や関係を、式を用いて数学の世界に形式的に表すこと、それを自分の考えることに適した形に表現しなおすこと、それを新たによみとり、その意味を解釈すること、というように数学の世界での操作とその結果による事象の解釈を生徒が経験し、問題解決の能力を伸ばすことを主な目的としている。

5. 生徒観

生徒は今年度、正負の数を学習してきた。そこでは、新たな負の数をこれまでの正の数の仲間と見なし、その計算や規則、性質を学習することを通して、数とは何かについて学習してきた。授業の中では「考えるべきこと」「考えた観点」など自身の問題解決の過程を意識する指導を心がけてきた。

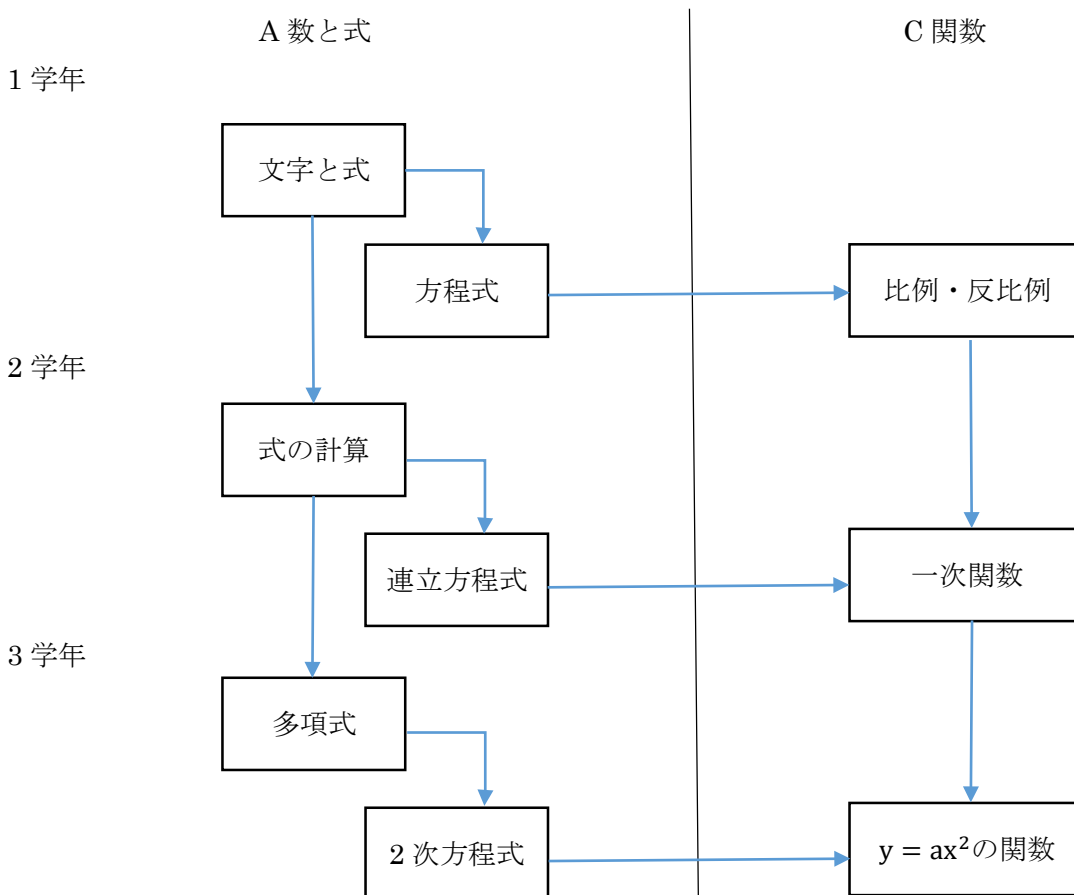
数学に対する能力は高く、正負の計算の際に3や-2などの数を擬変数としてみて説明をする生徒や、その説明を聞き納得する生徒がほとんどであり、擬変数への理解は高く、本単元において、単に数を一般化することには困難を示す生徒は少ないと考える。

数学に対して、苦手意識は持っていないが、「説明すること」に困難を感じている生徒もいる。しかし、分からない生徒の疑問を解決することで、数学的な理解が深まることを経験してきており、クラスの中で分からないことを分からないと言える学級文化が根付いてきたと感じている。発表する生徒が多く、また、素朴な意見も出てくる学級である。

6. 教材観

本教材の一番の価値は多様な考え方によってその数を求めることができることであると考えている。そして、その式も多様である。それぞれの式から、その式が表す考えや構造をよむことができる教材である。この教材を通して文字の単元の導入を行うことで、文字が変数や未知数、一般の数を表すということだけでなく、文字を用いて表される式が様々な考えを表現していることや、式を変形させることでそれに対応して、図などの元の事象へ新たな解釈が生まれるという意識を持つことができる。これによって、文字が変数や未知数、一般の数を表すという単なる知識を得るだけでなく、今後の生徒の数学の学習や探究において、文字を用いた創造的、発展的な活動ができるようになると筆者は考えている。

7. 指導計画における位置づけ



8. 単元の指導計画

	学習内容	主な評価
第1次	<p>1節 文字を使った式</p> <p>数の代わりに文字を使うこととそのよさ</p> <p>いろいろな数量を文字を使って表すこと</p> <p>文字を使った式の表し方</p> <p>文字を使った式をよむこと</p> <p>代入と式の値の意味</p>	<p>・数量やその関係・法則を一般的に表現するために、文字を用いて考えることの必要性やよさに関心を持ち、文字を用いた式で表したり、式の意味をよみとったりしようとする。【関・意・態】</p> <p>事象の中にある数量やその関係・法則を、文字を用いて表現し、一般的に考えることができる。【見・考】</p>
第2次	<p>2節 文字式の計算</p> <p>項と係数の関係</p> <p>同類項が同じである項をまとめること</p> <p>1次式の加減</p> <p>1次式と数の乗除</p>	<p>・文字を用いた式における乗法・除法の表し方を知り、式の計算に活用しようとする。【関・意・態】</p> <p>・文字を用いた式の計算も数の計算と同じようにみて、計算の方法を考えることができる。【見・考】</p> <p>・文字を用いた乗法、除法の式を約束に従って適切に表すことや、簡単な一次式の加法と減法の計算をすることができる。【技能】</p>
第3次	<p>3節 文字式の利用</p> <p>式が表す数量</p> <p>関係を表す式</p>	<p>・事象の中にある数量やその関係・法則を、文字を用いて表現し、一般的に考えることができる。【見・考】</p> <p>・事象の中にある数量やその関係・法則を、文字を用いて式に表したり、式をよみとったりすることができる。</p> <p style="text-align: right;">【技能】</p> <p>文字を用いることで、数量やその関係・法則を一般的に表現したり、式からその意味をよみとったりすることができることを理解している。【知・理】</p>

9. 本時

(1) 目標

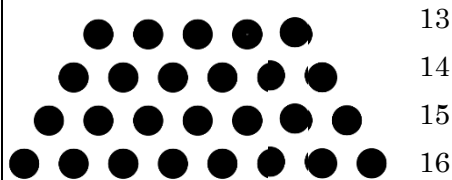
○式をよむことを通して、式が表す考えや、その構造について考えることができる。【見方・考え方】

○数量やその関係・法則について考え、13番目に何個の基石があるか考えようとする。【関・意・態】

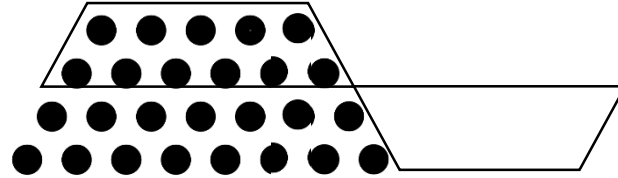
(2) 展開

分	主な学習活動	予想される生徒の反応	※指導上の留意点 ○評価
5	<p>【導入】</p> <p>右図の提示</p> <div style="text-align: center;"> <p>1 番目 2 番目 3 番目</p> </div> <p>「それぞれいくつありますか」</p>	<p>予想される生徒の反応</p> <ul style="list-style-type: none"> ・「1 番目は 10 個」 ・「2 番目は 14 個」 ・「3 番目は 18 個」 ・「4 個ずつ増えてる？」 	<p>※指導上の留意点 ○評価</p> <p>※生徒の考えを制限しないよう、「どのように増えたか」については話さないようにする。</p>
20	<p>【展開】</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <p>主発問：13 番目には、何個の●がありますか。また自分の考えを式に表しなさい。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・自力解決 ・式の発表 ・同じ式をまとめる 	<p>① $13+14+15+16$</p> <p>② $4\times 13+6$ ②' $6+4\times 13$</p> <p>③ $4\times 12+10$ ③' $10+4\times 12$</p> <p>④ $(13+16)\times 2$</p> <p>⑤ $(13+16)+(14+15)$</p> <p>⑥ $(13+16)\times 4\div 2$</p> <p>⑦ $13\times 4+6$</p> <p>⑧ $12\times 4+10$</p> <p>⑨ $16\times 4-6$</p> <p>⑩ 10×10</p>	<p>※あらかじめ生徒に発表用のミニホワイトボードとマーカーを配布しておく。</p> <p>○数量やその関係・法則について考え、13 番目に何個の基石があるか考えようとする。【関・意・態】</p>
20	<p>【練り上げ】</p> <ul style="list-style-type: none"> ・式をよむ 		<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <p>練り上げにおける主発問：発表された式がどのように考えられたか、数えられたか説明しましょう。</p> </div>

① $13+14+15+16$

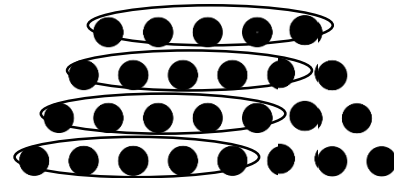


①' $13+14+15+16$ 式はこのように書くが実際には、 $(13+16)+(14+15)=29\times 2$ をしている。

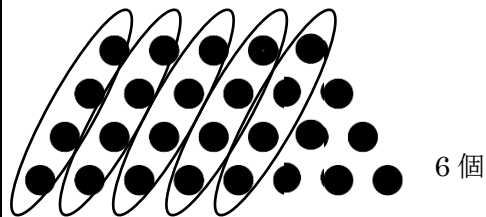


①'' 13を基準にして、13から1つ増えた、2つ増えた、数の変化に着目している。

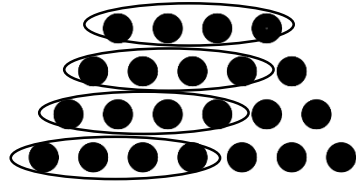
式に表すと $13+(13+1)+(13+2)+(13+3)$ ともできる。



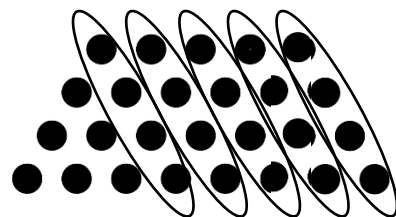
② $4\times 13+6$



②'乗数と被乗数を区別すると、 $13\times 4+6$ となる(㉗)



②''

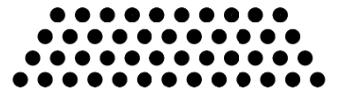


○式をよむことを通して、式が表す考えや、その構造について考えることができる。

【見方・考え方】

※発表の中で「○○くんの意見に似ているけど」「意見と違うけど」というような発言があったら、どこが似ているのか似ていないのかを聞き式と図の対応について考えさせる。

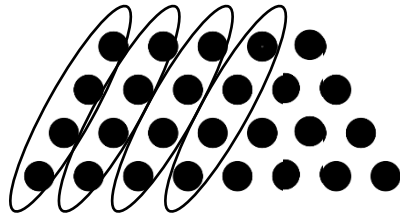
※説明する生徒には必要に応じて以下の13番目の紙を渡し、説明させる。



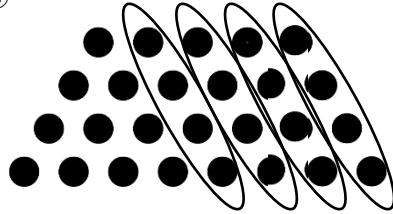
※乗数と被乗数については、分けて考える。

※式から図を考えるときに式を書いた人の考えと違う考えがいくつか出てきたら、それらも取り上げる。

③ $4 \times 12 + 10$



③'



③''

	1	2	3	4	...	12	13
	10	14	20	24		54	58

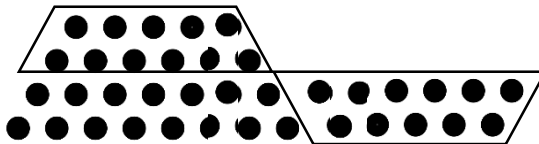


初項+12回増えた

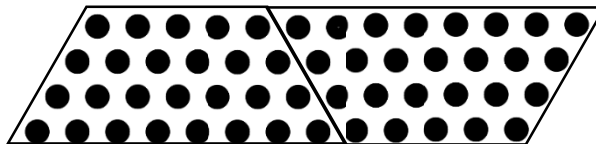
$10 + 4 \times 12$

④ $(13+16) \times 2$

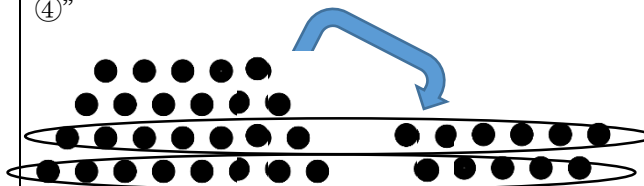
平行四辺形の公式を利用



④'

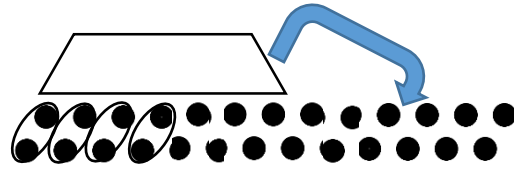


④''



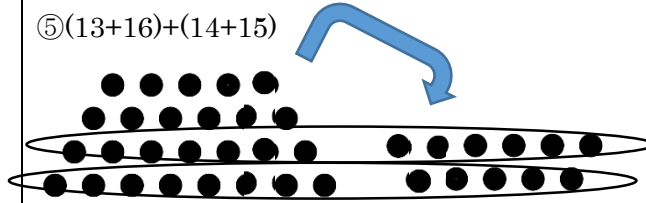
$13+16$ が 2 つあると考えている

④”2つの集まりが(13+16)個

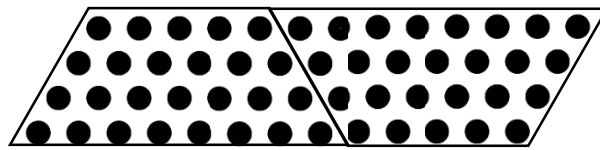


乗数と被乗数を区別すると、 $2 \times (13+16)$ になる

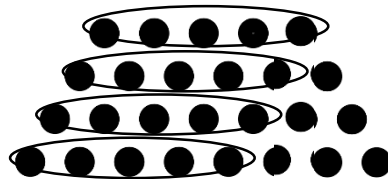
⑤ $(13+16) + (14+15)$



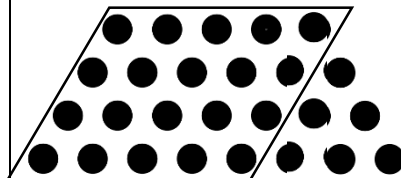
⑥ $(13+16) \times 4 \div 2$



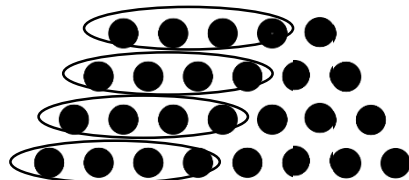
⑦ $13 \times 4 + 6$



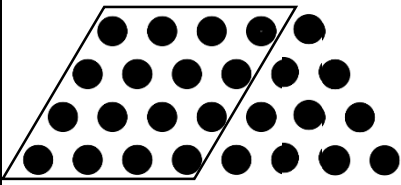
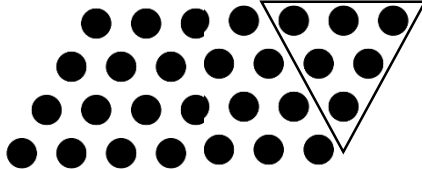
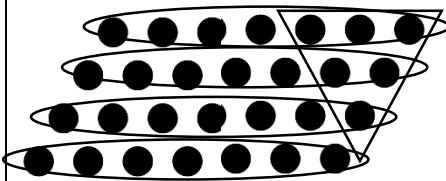
⑦' 平行四辺形の公式を利用

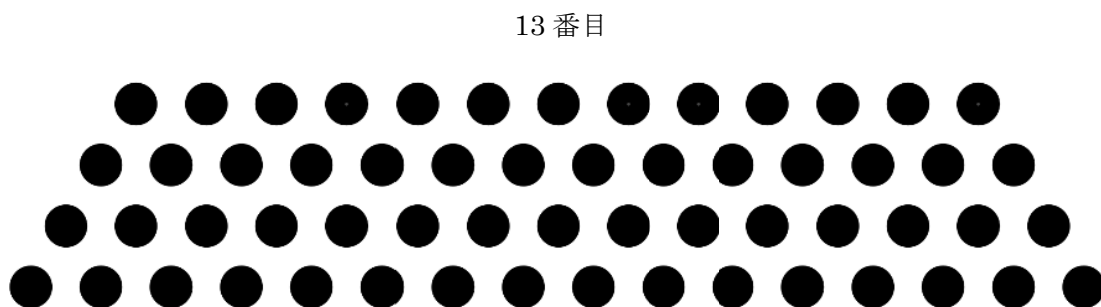
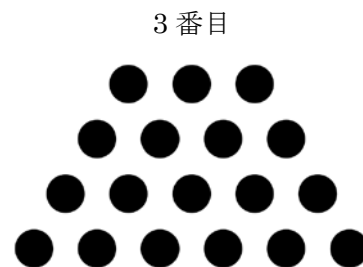
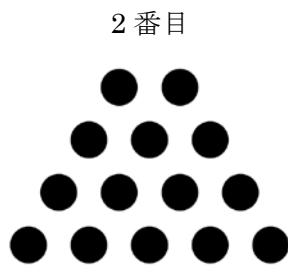
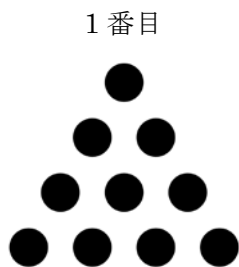


⑧ $12 \times 4 + 10$



⑧' 平行四辺形の公式を利用

		 <p>⑨ $16 \times 4 - 6$</p>  <p>足りない6つをたして，平行四辺形をつくる.</p> <p>⑨'</p>  <p>6個たして，16個のかたまりを4個作る.</p> <p>⑩1番目が10個だから，それを13倍すれば，13番目の数が分かる。(誤答)</p>	
5	<p>【まとめ】</p> <ul style="list-style-type: none"> ・新たな式の生成 <p>「自分の考えと似ていると思った式はどれですか。また，自分の式と同じ式なのに違う考えだったのはどれですか。」</p> <p>「自分の考えと違ったのはどこですか。」</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・「$13+14+15+16$ で横に数えていたけど，$13+(13+1)+(13+2)+(13+3)$ という式に表している友達がいた。13 という順番の数を使おうとしていた。」 ・「平行四辺形を作って$(13+16) \times 4 \div 2$ と表したが，足りない6つを足して平行四辺形を作ろうとしている人がいた。」 	<p>○多様な式をよむことを通して，式が計算の過程だけでなく，その結果や構造を表していること理解する【知識・理解】</p>



10. 授業観察の観点

本授業では、始めにあげたように「数学的プロセスの質を高める」ことに焦点を当てている。そして、本授業で提案する仮説は「生徒が遂行できると考えられるプロセスと、授業を行うことで質の高まった生徒のプロセスを規定することで、そのために授業者がとるべき手立てが明らかになる」であり研究課題は「生徒が遂行できると考えられるプロセスと、授業を行うことで質の高まった生徒のプロセスを規定することで、そのために授業者がとるべき手立てが明らかになる」という仮説を文字式の導入の授業を通して実証することである。

これらを踏まえて、授業観察では、「生徒が遂行できると考えられるプロセス」「授業を行うことで質の高まった生徒のプロセス」「授業者の手立て」に焦点を当てたい。具体的には、以下の通りである。

①自力解決の間に自分の考えを13などの数を用いて表すことができたか。(生徒が遂行できると考えられるプロセス)

②式をよみそれらと比較する活動を通して、式に表されていることが計算の過程だけではなく、計算の結果や図の構造、変化などを表していることを理解することができたか。(質の高まった生徒のプロセスと授業者の手立て)

以上2点に焦点を当てることで、本授業における提案と研究課題に対して迫っていきたい。