

CCSS における面積公式の取扱い

渡辺 忠信*

1. 面積の取扱いについて

先月・先々月と2回に分けてアメリカに於ける図形の領域の取扱いについて紹介してきた。今回は面積の取扱いについて考察してみる。面積という内容は、広さを測るわけであるから、量と測定の領域の内容ととらえることもできるが、平面図形に関連する量であることから、図形の領域とのかかわりも深い。さらに、公式の理解は一般化とか、変数とか、関数的な考え方も関連してくる内容でもある。しかし、面積及び面積公式の学びをいつ、そしてどのように行うかということについては、アメリカ国内ではいろいろと意見がある。下の表は、今回発表された Common Core State Standards (CCSS), NCTM Focal Points, そして筆者の住むジョージア州の現行のスタンダードと日本の指導要領の面積及び面積公式の取扱いを要約したものである。

日本の現行の指導要領よりもアメリカのカリキュラムの方が面積の導入は少し早くなっている。しかし、日本のように続けた学年で面積の学びをまとめるような形にはなっておらず、学びの終了は日本よりも遅くなっている。

表からもわかるように、間もなくアメリカの多くの州で実施される CCSS では、第4学年と5学年の2

年間は面積の学びをせずに、第6学年で三角形／四角形の面積公式の学びをすることになっている。なぜ、CCSS では、面積の導入をそう急ぐのであろうか？ その1つの理由は、CCSS ではかけ算の1つのモデルとしての面積図に重きを置いているということが考えられる。例えば、CCSS の3年生のスタンダードには次のような記述がある。

3. MD. 7 Relate area to the operations of multiplication and addition.

面積をかけ算とたし算と結びつけて考えることができる。

このスタンダードの1つの目的は、かけ算を面積図で表すことによって、かけ算の性質である交換法則や分配法則などの理解に役立てようということであろう。日本でも分数のかけ算の学習で面積図が用いられることがあるが、かけ算の導入時にはアレー図が用いられている。もちろんこれはかけ算の導入時にはまだ面積の学習をしていないことにもよるが、低学年で学ぶかけ算では分離量を取り扱う問題が多く、それを連続量である面積で表現することに対する児童の戸惑いなども考慮してのことと思われる。連続量が使われる分数（そして小数）のかけ算の学びの時には、面積図が確かに役立つが、整数のかけ算の学びの中で、アレー

学年	CCSS	NCTM	ジョージア	日本の指導要領
3年	面積の概念導入 長方形と正方形の面積		面積の概念導入 長方形と正方形の面積	
4年		面積の概念導入 長方形と正方形の面積 公式		面積の概念導入 長方形と正方形の面積
5年		三角形と四角形の面積 公式	三角形と四角形の面積 公式 円の面積	三角形と四角形の面積 公式
6年	三角形と四角形の面積 公式			円の面積
7年	円の面積	円の面積		

*ケネソー（ジョージア）州立大学理学部

図でなく本当に面積図が必要なのかは、今後 CCSS が実施された後に実践を通して多に議論されなければならない点ではなからうか。

2. 面積公式ついて

こうして日本に比べると早く長方形の面積は導入されるが、かけ算・わり算の数の拡張とその筆算、三角形・四角形の分類などの学びが第4・5学年で行われるため、6学年の面積公式の学びとの間にギャップがある。だが、CCSSでの面積公式の学びが第6・7学年にまとめて取り扱われている点は、ある意味で日本に於ける面積公式の指導と似ていると言えるかもしれない。しかし、CCSSでの面積公式の取扱いについての表記は限られていて、不明瞭な点もある。例えば、第6学年のスタンダードは次のように述べられている。

6. G.1 Find the area of right triangles, other triangles, special quadrilaterals, and polygons by composing into rectangles or decomposing into triangles and other shapes; apply these techniques in the context of solving real-world and mathematical problems.

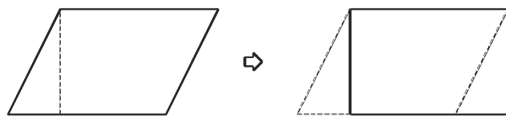
直角三角形やそのほかの三角形、特別な四角形、そして多角形の面積を長方形を作ったり、三角形などのほかの形に分解したりして面積を求める；これらの方法を現実的な場面や数学の問題の解決に用いる。

まず1つの疑問は「特別な四角形」とは何を含むのかというものである。平行四辺形はまず間違いないだろうが、台形の公式はどうであろう？ また、菱形は形としては早くから学ばれていることから、子どもたちにはなじみのある形と考えられるが、菱形の面積を対角線を用いて求める公式も含まれるのであろうか？ 日本の指導要領でも多少曖昧な表現がないとは言えないと思われるが、指導要領解説書を通してある程度の範囲付けはされているように思われる。これも現在作られている、日本の解説書にあたる Progression の文書の中で明記されることが望まれる。

もう1つの疑問点は、直角三角形とそのほかの三角形が述べられている理由である。日本でも面積公式の学びを三角形から始めるか平行四辺形にするかは未だに議論があるようだが、もし平行四辺形から始めるのであれば、特別に直角三角形に触れる必要はないように思われる。したがって、CCSSが直角三角形を明記しているのは、面積公式の学びを三角形から始めることを示唆しているのであろうか？ この辺りも Progression で詳しい説明が必要であろう。

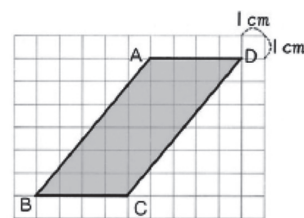
しかし、面積公式の学びの重点は、面積を直接求められない形を与えられた時に、既に学習した形の面積の求め方に結びつけてその面積を求める、という考え方ではないだろうか？ 日本の先生方は、「等積変形」と「倍積変形」という言葉は当然のように使われているであろうが、英語にはこれらにあたる言葉がない。もちろん下の図にあるような、平行四辺形の面積を長方形に形を変えて考えることは NCTM のスタンダー

ドなどでも紹介されている。



しかし、知り合いのウィスコンシン大学を退官された数学者のアスキー氏はこの活動だけから面積＝底辺×高さの公式を導くのは誤った一般化だと言われる。つまり、公式にある「底辺」は本来平行四辺形のどの辺であっても良いわけであるが、この活動をもとにすると、長方形が作れるように平行四辺形の片側から直角三角形を切り取れるように置いた場合の辺のみが「底辺」になりえるわけだからである。日本の教科書では上の図のような平行四辺形の変形から面積＝底辺×高さの公式を導いた後で、さらに下の図に示したような平行四辺形の面積の求め方を考え、「高さ」を表す直線が与えられた平行四辺形内にはかけないような場合を学ぶ。そして、「高さ」とは底辺とその対辺とを含む平行線の幅のことであり、それを量るためには、平行な直線に垂直で2つの直線を結ぶ線分の長さを測れば良いこと、そしてその線分は、どこに書いても長さは変わらないことを押さえ、高さの意味を明確にし、公式をより一般化している。そして、こうした学びも先月号でも考察したように、児童が実際に形を作る、変形するという活動を大切にしながら行われている。

3 Let's think about how to find the area of the parallelogram on the right if we make side BC the base!



東京書籍 Mathematics for Elementary School 5A, p. 72

CCSSでは、算数の内容だけでなく、mathematical practices (数学的思考方・手法・態度)を強調している。その1つとして“Look for and express regularity in repeated reasoning”(繰り返し使われる考え方を見いだし、表現する)というものがある。面積の公式の学びはまさに、既習の形の面積の求め方を使えるように「等積変形」又は「倍積変形」と言った考え方を学びそれをを用いる学びであり、「繰り返し使われる考え方」の代表的なものと言えるかもしれない。そして、その考え方を学ぶためにどのような「特別な四角形」の面積の求め方をどのような順序で学ぶことが有効かを議論する必要がある。面積の公式の学びがどの学年で行われるかに関係なく、こうした考え方を学ぶことが大切であるということも、Progressionで強調してもらいたい点である。