

### 合同と対称

吉田 誠\*

#### 日米における合同と対称の比較

2年間続いた Lost in Translation は今回最終回となる。この連載が読者の皆さんのアメリカの算数の教材やその指導方法についての現状を知る機会となり、また、日ごろの算数研究・実践に少しでもお役に立つものとなれば幸いである。

さて今回は、図形の「合同」と「対称」について考察したい。この内容は図形をより深く分析・理解したり、新しい性質を見つけたり、2つの図形の相等・相違や相関関係を論理的に考えていく上で小学校の高学年の図形学習にお

ける重要な学習内容として位置づけられている。また、このような観点で図形をみる学習は、中学校における図形の考察で必要となる力になる。

図形の合同と対称の学習は、今回の指導要領の改訂で中学校から移行されて来た内容であるが、平成元年の指導要領ではもともと小学校の5年生と6年生で学習していた内容である。そこで、日本とアメリカの算数指導において合同や対称がどのように扱われているのかを比較するために、以下に日本の指導要領（平成20年）と私の住む New Jersey 州（NJ 州）と Common Core State Standards

学年	日本の指導要領（平成20）	ニュージャージー	CCSS
1年			図形の合成・分解し、合同や対称の素地学習
2年		図形の合同（同じ大きさ、同じ形） 図形の移動：基本図形で模様を作り、 図形の分割・合成	平面図形や立体図形を描く、作る、 分析する。（面積、体積、合同、対 称、相似などの素地学習）
3年		2つの図形の関係：(1)同じ大きさ・ 同じ形、(2)線対称、図形の移動の説 明（slide, flip, turn）	
4年		2つの図形の関係：(1)同じ大きさ・ 同じ形、(2)線対称、図形の移動の説 明（slide, flip, turn）	線対称：2つに折ったとき、できた 2つの図形がぴったり重なる・線対 称図形を見つけ、対称の軸を描く。
5年	図形の合同（作図、性質）	相似形を見つける。合同、線対称・ 回転対称の理解・活用。平行移動、 対称移動、回転移動を行いグラフ用 紙で合同図形を描く。	
6年	対称な図形（線対称・点对称）（作 図、性質）図形の縮図・拡大図（作 図、性質）	相似形をみつける。合同、線対称・ 回転対称の理解・活用。平行移動、 対称移動、回転移動を行いグラフ用 紙で合同図形を描く。	
7年	図形の移動（平行移動、対称移動、 回転移動）	線対称と回転対称の理解。図形の縮 小、拡大、図形移動（平行移動、対 称移動、回転移動）を理解・活用し、 合同な図形を描く。	
8年	図形の合同（合同な図形の性質、三 角形の合同条件、証明）	線対称と回転対称の理解。図形の縮 小、拡大、図形移動（平行移動、対 称移動、回転移動）を理解・活用し、 合同な図形を描く。	図形の合同・相似に（モデルやソフ トなどを使って理解）図形の移動 （平行移動、対称移動、回転移動） の性質、移動の過程の説明、グ ラフ上の座標点で点の移動の説明

\* ウィリアム・バターソン大学教育学部

(CCSS)の対比表を作成した。これまでの連載でも述べているが、CCSSは、2010年6月に発表されたアメリカがこれから目指す算数・数学教育の基準である。また、ここでとりあげたNJ州のスタンダードは、NCTM(全米数学教師協議会)のスタンダードを基に作られた今日多くの州で実際に用いられている一般的なスタンダードの1つである。ここでは、図形の合同、対称、それから移動の学習の流れがわかり易くなるよう、小学校6年生までの内容に限らず、8学年(中学2年生)までの対比表を載せた。

### 日本のレベルの高さ

まず日本の指導要領とNJ州のスタンダードを比較してみると、日本の指導要領では4年生までに学習した三角形、四角形の学習の定義や性質を基盤として5年生で図形の合同を学習し、6年生で図形の対称(線対称と点対称)を学習することになっている。一方、NJ州のスタンダードは、図形の合同や対称や移動に関する学習を日本よりもずいぶん早い小学校の低学年の時期から導入し、高学年に至るまでの長期間に渡って行っていることがわかる。アメリカの教科書の代表的な合同や線対称の定義は以下の通りで、このような定義が7年生や8年生でも使われている。

Congruent: "Two geometric figures are congruent if they have exactly the same shape and the same size."

合同:「2つの図形が全く同じ形で同じ大きさであれば、それらは合同である。」

Line symmetry: "A figure has line symmetry if it can be flipped about a line and land exactly on itself. The line is called the line of symmetry."

線対称:「ある直線で図形をひっくり返したとき、その図形がそのものの図形にぴったりと重なるとき、その図形は線対称がある図形である。そのときの直線を対称の軸と呼ぶ。」

これらの定義をもとに、多くのアメリカの教科書では、「ぴったり重なる」という操作を重視し、8年生になっても、ぴったり重なるということが数学的にどのようなことを指すのか、分析的に考察するような活動は重視されていないようである。一方、日本の教科書では、5年生の合同の学習で、すでに「ぴったり重なる」と言うことを、対応する角の大きさや線分の長さを調べたり、作図などを通して構成することを経験したり、それを数学的に分析・表現したりし、中学校の数学科での図形の学習の基盤となるように配慮されている。同じようなことが、対称図形の学習でも行われ、「対称軸をはさんで互いに対応する点を結んだ直線は、対称軸に垂直に交わり、また、対応する点からの対称軸までの距離は等しい」という線対称な図形の性質を理解し、これをもとに作図を通して、さまざまな対称図形を構成したりすることも経験できるように意図されている。このような合同や対称の性質の学習は、アメリカでは一般的に高等学校(9年生や10年生の頃)のGeometry(幾何)で行われるようである。そのため、アメリカの高校の先生が、日本の小学校の教科書の合同や対称の単元の内容の扱いを見るとそのレベルの高さに驚く。

対称図形の内容についてさらに見ていくと、日本で教える内容とアメリカで教える内容に興味深い違いがあることに気付く。それは、6年生で学習する点対称(point symmetry, 180°-degree symmetry)の図形、「1つの点を中心に180度回転させると、もとの図形にぴったり重なる図形」をアメリカでは一般的に扱っていないということである。代わりに、アメリカでは回転対称(rotation symmetry)について学習する。例えば、正三角形は回転

対称な図形で、それをその中心点で回転させると、1回転する間に120度と240度と360度回転したときに図形がぴったりと重なるということを学習する。しかし、日本では、180度回転してぴったり重なる点対称な図形のみ焦点を絞って学習が行われる。

### CCSSの内容と課題

さて、アメリカの合同や対称についての学習の特徴は、3年生の頃から図形をずらす(slide)、ひっくり返す(flip)、回す(turn)などという言葉を使って平行移動(translation)、対称移動(reflection)、回転移動(rotation)に焦点を当てて指導している点である。そして、線対称や回転対称の学習もこの移動の考えに基づいて指導が計画されているようだ。(実際の授業ではそのように考えて授業をしているのを残念ながら見たことはないのだが。)しかし、低学年から何年もかけて、図形の移動、合同、対称について繰り返し学習しているにもかかわらず、日本で行われているような図形の構成要素に着目して性質を考えたり、それを元に図形を構成したりするような活動に深めるような扱いはあまり強調されず、「ぴったりと重なる」という日常的な表現で学習を終わらせている点には大きな問題があると思う。

このような、アメリカにおける一般的な図形指導に対して、CCSSでは合同と対称の指導が、4年生の線対称と8年生の図形の合同、相似、移動の2つに学習が大きく整理された。

4年生では、

Recognize a line of symmetry for a two-dimensional figure as a line across the figure such that the figure can be folded along the line into matching parts. Identify line-symmetric figures and draw lines of symmetry.

ある平面図形が線対称な図形であることを、その図形のある直線上で折ることによって2つの重なる部分に分かれることで確認する。線対称な図形を見分け、線対称の軸を描き入れる。

8年生では、

1. Verify experimentally the properties of rotations, reflection, and translations

回転移動、対称移動、平行移動の性質を実験的に確かめる。

2. Understanding that a two-dimensional figure is congruent to another if the second can be obtained from the first by a sequence of rotations, reflections, and translations; given two congruent figures, describe a sequence that exhibits congruence between them.

2つの平面図形が合同であることは、2つ目の図形が始めの図形をいくつかの回転、対称、平行の移動によって得られた場合であることを理解する。2つの合同な図形が与えられたとき、それが合同となる移動の過程を説明する。

以上のような説明がCCSSでなされているが、残念ながらこれだけを読んだだけでは合同、対称、移動についてどんな性質をいつの段階で見つけ、ほかの図形の学習と結びつけていくのかははっきりしない。そして学習の時期が4年生と8年生に大きく離されていることの理由も分からない。合同、対称、移動の学習が、単純な図形の移動による形合わせやグラフ用紙上でのパズル的な作図の学習になり、図形やその性質の理解を深める学習からほど遠いものにならないためにも、指導内容が明確で系統性がわかりやすい解説書が早くでてくることが望まれる。